MEMORIA

SOBRE LAS EQUACIONES SUPERIORES

Ó

MÉTODO GENERAL DE RESOLVERLAS.

POR D. MIGUEL DE ALVEAR

CORONEL DE INFANTERIA.

CIUDAD DE S. FERNANDO.

En la Imprenta del Real Cuerpo de Artillería de Marina. Año de 1814.

INTRODUCCION

LA resolucion de las equaciones superiores ha excitado en todos tiempos la atencion de los mas célebres Analistas, sin que á la hora esta ninguno haya podido hallar un método general de resolverlas: el que proponemos en esta pequeña memoria dista mucho de llenar esta idea; pero nos lisongeamos meresca la aceptacion de los inteligentes, así por su sencillez como por su generalidad; y los Maestros, que para instruccion de sus Alumnos en esta parte del analísis, prefieran este método aqualquiera otro, ahorraran tiempo y trabajo. Así lo acreditó la experiencia en el curso de Matematicas, que enseñamos en la Academia de Guardias Marinas de Cádiz, en el año de 1792; pues habiéndolo preferido al que trae Bezout en su curso para el uso de la Marina, felizmente correspondio el exîto á nuestras esperanzas.

Los conocimientos preliminares y necesarios para este método son: saber pasar á un solo miembro todos los términos de la equacion: hacer desaparecer los denominadores, transformando la equacion en otra que no los tenga, sin que por ello se le dé coeficiente al primer término: hacer homogénea la equacion: esto es, que el número de dimensiones sea el mismo en cada término: y finalmente saber resolver las equaciones de los grados inferiores.

MEMORIA

SOBRE LAS EQUACIONES SUPERIORES

Ó

MÉTODO GENERAL DE RESOLVERLAS

1. EL método de resolver las equaciones por qualesquiera factores es general, y abraza los divisores racionales y los que no lo son; y aunque se practíca tambien, tanteando como lo hace Bezout en su curso de matematicas para la Marina, es sinembargo preferible nuestro método tanto por su generalidad, como por que no conduce á una equacion de un grado mas elevado que el de la primitiva. Hagamos la aplicacion á los grados 4.° 5.° y 6.° y se verá quanto es general.

QUARTO GRADO.

Sea la equacion canonica.. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Y pídese reducirla á dos factores racionales del 2.° grado.

Sean estos dos fractores . . $x^2+mx+n=o$ . . P.
y . . . . $x^2+Mx+N=o$ . . Q.
en quienes m, n, N son cantidades que se han de determinar en el progreso del calcculo. Multipliquense estos dos factores entri sí, y resultará la equacion

$$\begin{aligned} x^4+mx^3 &+ nx^2+Mmx+Nn=o \;..\; R. \\ +Mx^3 &+ mMx^2+mNx \\ &+ Nx^2 \end{aligned}$$

que debe ser la misma que la propuesta. Igualense, pues, los coeficientes de cada termino, y resultarán tantas equaciones como indeterminadas, y de consiguiente podran determinarse.

Seran pues . . . . $m+M=p$ . . . 1.ª
$n+mM+N=q$ . . . 2.ª
$Mn+mN=r$ . . . 3.ª
$Nn=s$ . . . 4.ª
} . . E.

Ahora no hai sino hacer lo que previene el citado Bezout tomo III. num. 223. que se reduce á hallar los valores de m, y n, (coeficientes del factor P) tomandolos de dos de las quatro equaciones en E, y substituirlos en las otras dos: resultarán dos equaciones que no contendrán otras indeterminadas que M y N. Eliminese una de ellas (por exemplo M) por el método del mismo Autor tomo III. num. 167. ú otro equivalente, y quedará una equacion en N. Busquense los divisores comensurables de esta equacion, y se tendrá el valor de N, el que substituido en una de las equaciones en M y N, se tendrá el valor de M, y de consiguiente el factor del 2.º gra-

do $x^2+Mx+N=o$. Y como con estos valores de M, y N, poniendolos en las equaciones en E, se hallan los de m, y n, se tendrá el otro factor $x^2+mx+n=o$, que es lo que se pide. Pero este método es siempre prolixo y se abrevia del modo siguiente.

2. Atendiendo á las mismas equaciones en E, respecto á que $Nn=s$, será n, un factor de s. Supongase conocido, y propongamonos determinar el factor P, pues que teniendo este, si se divide por él la equacion propuesta ha de resultar el otro Q. Para esto solo falta determinar m. Tomo, pues, dos qualesquiera de las equaciones en E, las mas cómodas, (dexando la ultima), por exemplo 1.ª y 3.ª Elimino en ellas M, y N; quedará una equacion en m, y n, que, supuesto n conocido, dará el valor de m. Como N se elimina facilmente poniendo en su lugar $\frac{s}{n}$, para eliminar M, con las dichas equaciones 1.ª y 3.ª hago en la 1.ª... $M=p-m$, y en la 3.ª $M=\frac{rn-sm}{n^2}$. Igualando estos dos valores se tiene $p-m=\frac{rn-sm}{n^2}$, que dá finalmente $m=\frac{rn-pn^2}{s-n^2}$ equacion, que servirá de formula para hallar en las equaciones del 4.° grado el coeficiente m del factor P, tomando por n uno de los factores racionales de s, último término de la equacion, y substituyéndolo en dicha formula.

Hallada de este modo la equacion subsidiaria P, divido por ella la propuesta. Si la division sale, he hallado lo que busco, y el quociente será el otro factor Q. Si la division no puede hacerse, pruebo otro divisor de s, poniéndolo en lugar de n en la formula para tener m, probando estos divisores con + y con — hasta que, si ninguno satisface, se concluya que la equacion no es reductible, á lo menos por este método. Exemplo.

Sea la equacion $x^4+6x^3+11x^2+10x+5=0$ será $p=6$; $q=11$; $r=10$; $s=5$. Los divisores de 5 son ± 1, ± 5. Pruebo el $+1$, y pongo $n=1$ en la formula, y tendré $m=1$, y la subsidiaria será $P=x^2+x+1=0$. Parto por esta la equacion dada, y resultará $Q...x^2+5x+5$. Estos dos factores multiplicados uno por otro restituyen la equacion, y resueltos dán las quatros raices de la equacion, dos imaginarias $x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, y las otras dos reales é incomensurables $x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.° Exemplo: Sea dada la equacion

$$z^4-8z^3+9z^2+38z-40=0$$

Comparada á la canonica será

$$p=-8;\ q=9;\ r=38;\ s=-40.$$

Divisores de 40, con $\pm$	1.os	2.os	3.os	4.os
	2			
	2	4		
	2	10	8	
	5		20	40

Pruebo los positivos y empiezo por $+2$. Pongo, pues, en la formula $n=2$, y será $m=-\frac{108}{44}$. Pero como este es un valor fraccionario, puesto en la equacion R en la qual debe servir á restituir la equacion dada, resultarían los coeficientes en que se halla m, fraccionarios, lo que es contra la hipótesis: luego no sirve: pruebo, pues, el divisor $+4$, y pongo en la formula $n=4$, y será $m=-5$: luego el factor P será $z^2-5z+4=0$; y partiendo la equacion por este factor, viene al quociente $z^2+3z-10=0$: luego estos dos factores satisfacen, desuerte que multiplicados entre sí dán la propuesta, y resueltos se tienen las quatro raices de la equacion -2, $+1$, $+4$, $+5$ todos reales, y racionales; notandose de paso que este método podrá servir muchas veces para resolver la equacion del 4.° grado, y hallar sus raices sin necesidad de quitarle el 2.° término.

3. Y no solo podrá servir quando tiene la equacion el 2.° término, sino quando viene sin él, poniendo en la formula $p=0$, y dexándola reducida á $m=\frac{rn}{s-n^2}$. Demos él mismo exemplo que pone Bezout núm. 210.

Sea, pues, la equacion $x^4+3x^2-52x+48=0$. Comparada á la canonica, será $p=0$; $q=3$, $r=-52$; $s=48$. Los divisores de 48 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48, con $\pm$: en vano se probarán los primeros; pero tentando el 16, y poniendo en la formula $n=16$, se halla $m=4$; luego el factor P será $x^2+4x+16=0$, partiendo la equacion por este factor viene al quociente $x^2-4x+3=0$, que multiplicado por el otro factor restituye la propuesta, y resueltos dán las quatro raices de la equacion, dos imaginarias $x=-2\pm2\sqrt{-3}$, y dos reales $x=2\pm\sqrt{1}=\begin{matrix}+3\\+1\end{matrix}$. Por donde se vé bastantemente su generalidad.

Sea otro exemplo la equacion $x^4-32x^2+5x+12=0$, que tambien carece de 2.° término: comparada á la canonica será $p=0$; $q=-32$; $r=5$; $s=12$. Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12 con $\pm$; y haciendo $n=-3$, porque los anteriores no satisfacen, resulta $m=-5$; luego el factor P será $x^2-5x-3=0$; y partiendo por este la equacion, dá el otro factor $x^2+5x-4=0$, los quales multiplicados entre sí, restituyen la equacion propuesta, y resueltos dán sus quatro raices, á saber $x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{41}{4}}$, y $x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{37}{4}}$.

Sea finalmente otro exemplo la equacion sin 2.° término $x^4+11x^2-2x+56=0$: haciendo $n=7$, uno de los divisores de 56, resulta $m=-2$; y de consiguiente el factor P será $x^2-2x+7=0$, y partiendo por este la equacion, se tendrá x^2+

$2x+8=o$, por el otro factor, y resueltos dàn $x=1\pm\sqrt{-6}$; y $x=-1\pm\sqrt{-7}$ por las quatro raices.

APLICACION Á LAS EQUACIONES *Literales.*

4. Aqui se debe advertir que los divisores que deben tentarse, y poner en la formula en lugar de n, han de ser de dos dimensiones, sin hacer caso de los divisores simples, ni los que pasen de dos dimensiones. La razon es clara, porque en la equacion 4.ª E, $nN=s$, n, y N factores de s, son cada uno de dos dimensiones, por ser los últimos términos de factores compuestos del 2.° grado, y porque la equacion del 4.° grado, si es homogénea como se supone, debe tener el último término s de quatro dimensiones, que sean el producto de las quatro raices. En los exemplos numéricos que hemos resuelto, como el 1.° aunque los divisores 1 y 5 (que forman los últimos términos de las subsidiarias P y Q) parezcan simples, son realmente de dos dimensiones de las quales una es la unidad; y de aqui es, que en las equaciones puramente numéricas es forzoso probar todos los divisores del ultimo término hasta hallar el que satisface.

5. Sentado esto, sea la equacion

$$x^4+ax^3+a^2x^2-a^2bx-a^3b=o.$$
$$-abx^2$$

Comparada á la canonica será $p=a$; $q=a^2-ab$; $r=-a^2b$; $s=-a^3b$.

	1.os	2.os
Divisores de $-a^3b$...	—	—
	a	
	a. . .	a^2
	a. .	ab
	b. .	$a\sqrt{ab}$
	$\sqrt{ab}$	

que se tentarán con $\pm$, esto es los 2.os, y no hay necesidad de pasar adelante en buscar los de tres dimensiones &c. pues no han de servir.

Pruebo $+a^2$, y pongo $n=a^2$, y será $m=\frac{-a^4b-a^5}{-a^3b-a^4}$ en quien si el numerador se parte por el denominador, se hallará $m=a$; luego el factor P será $x^2+ax+a^2=o$; y partiendo la equacion dada por este factor se hallará $x^2-ab=o$; y multiplicados estos dos factores entre sí, restituyen la equacion propuesta, y resueltos darán sus raices.

Sea otro exemplo la equacion literal $x^4+(2a-2b)\ x^3-(\ ac+5ab)x^2+(\ 2ab^2-2a^2c\ )\ x+a^2bc=o$.

Comparada á la canonica será $p=2a-2b$; $q=-ac-5ab$; $r=2ab^2-2a^2c$; $s=a^2bc$. Los divisores de dos dimensiones del último término son $\pm a^2$, $\pm ab$, $\pm ac$. &c. Haciendo $n=-ab$, resulta $m=2a$: luego el factor P será $x^2+2ax-ab=o$; y partiendo la equacion por este factor se hallará $x^2-2bx-ac=o$, por el otro factor, los quales multiplicados entre sí restituyen la equacion propuesta, y resueltos dán las quatro raices.

6. Pudiera tambien haberse hallado otra formula para el valor de m, tomando las equaciones 1.ª y 2.ª ó la 2.ª y 3.ª porque esto es indiferente: pero entonces los valores de m hubieran venido ó mas compuestos, ó como raices de una equacion del 2.º grado.

7. Puede suceder que el último término ya sea numerico, ó ya algebraico tenga muchos divisores, y en este caso se hallaran del modo siguiente.

Dividase el último término por su menor divisor posible, y el quociente que resulte dividase tambien por su divisor menor, y continuese de este modo hasta tener un quociente que solo pueda dividirse por la unidad. Este último quociente, y los divisores anteriores con la unidad son los divisores simples del último término; y los productos de los divisores simples multiplicados de dos en dos, de tres en tres, quatro en quatro &c. son los divisores compuestos.

Así para hallar todos los divisores de 60, divido 60 por 2, el quociente 30 por 2, el quociente 15 por 3, y el quociente 5, que solo puede dividirse por la unidad, es el último divisor simple: así todos los divisores de 60 son:

Divisores simples . . . . 1, 2, 2, 3, 5.
Compuestos de dos en dos . . 4, 6, 10, 15.
Compuestos de tres en tres. . . . 12, 20, 30.
Y de quatro en quatro. . . . . 60.

Del mismo modo, todos los divisores de $21ab^2$ son:

Divisores simples. . . . $1, 3, 7, a, b, b.$

Divisores de dos dimensiones. . . $21, 3a, 3b, 7a, 7b, ab, b^2.$

Divisores de tres dimensiones. . $21a, 21b, 3ab, 7ab, 3b^2, 7b^2, ab^2.$

Divisores de quatro dimensiones. . . $21ab, 21b^2$ $3ab^2, 7ab^2.$

Divisores de cinco dimensiones. . . . . $21ab^2.$

Si el último término fuese un binomio, trinomio &c. en nada variará el modo de hallar sus divisores: Asi todos los divisores de $b^2d^2+b^3d$ son:

Divisores simples. . . . $1, b, b, b+d, d.$

Divisores de dos dimensiones. . . . $b^2, b^2+bd, bd, bd+d^2.$

Divisores de tres dimensiones. . . . $b^3+b^2d, b^2d+bd^2, b^2d.$

Divisores de quatro dimensiones. . . . . $b^3d+b^2d^2$

Así mismo, todos los divisores de $6a^2b+9a^2c$ son: $1, 3, a, a^2, 3a, 3a^2, 2b+3c, 6b+9c, 2ab+3ac, 6ab+9ac, 2a^2b+3a^2c, 6a^2b+9a^2c.$

8. Hasta aqui solo hemos tratado de los divisores racionales, pero como nuestro método se extiende indistintamente á los racionales como á los irracionales, vamos á ver el modo de tener estos, quando el último término se presenta en la forma racional.

9. Todo el artificio consiste en resolver los divisores simples en radicales: esto es, que de

dos divisores simples racionales consecutivos se forma un divisor simple irracional, hallando un medio geométrico entre aquellos dos: Así de 2, y 3 divisores simples racionales de 60, se forma $\sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$, que es un divisor simple irracional de 60, y medio geométrico entre 2 y 3; y si 60 se transforma en $10\sqrt{6} \times \sqrt{6}$ esta expresion será divisible exâctamente por $\sqrt{6}$. Del mismo modo de a, y b divisores simples racionales de $21ab^2$ se forma $\sqrt{ab}$, que es un divisor simple irracional de $21ab^2$, y que es un divisor exâcto transformado $21ab^2$, en $21b\sqrt{ab} \times \sqrt{ab}$: igualmente de b, y b+d divisores simples racionales de $b^2d^2 + b^3d$, se forma $\sqrt{b^2 + bd}$, que es un divisor simple irracional, y divide exâctamente á $b^2d^2 + b^3d$ transformándolo en $bd\sqrt{b^2 + bd} \times \sqrt{b^2 + bd}$: por este mismo órden se discurrirá en los demas.

Si los divisores simples irracionales se combinan una vez con sus respectivos divisores simples racionales, se tiene los divisores irracionales de dos dimensiones, y si se combinan dos veces, se tendrán los divisores irracionales de tres dimensiones, y así de los demas: así $a\sqrt{ab}$ es un divisor irracional de dos dimensiones de $21ab^2$; y $a^2\sqrt{ab}$ lo es de tres dimensiones: del mismo modo $b\sqrt{b^2 + bd}$ es un divisor irracional de dos dimensiones de $b^2d^2 + b^3d$, y $b^2\sqrt{b^2 + bd}$ lo es de tres dimensiones.

APLICACION Á LAS EQUACIONES DEL 5.° grado.

11. Pidese un factor comensurable del 2.° grado $x^2+mx+n=0$, que multiplicado por uno del 3.° $x^3+Mx^2+Nx+R=0$, produzcan la equacion $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$, canonica del 5.° grado. Notese que dividimos la equacion en dos factores uno del 2.° grado, y otro del 3.° que sabemos resolver, porque suponemos que la equacion no se ha hallado divisible por un factor del 1.° grado; pues si lo fuera, quedaría reducida al 4.° y se procedería como se ha dicho.

Hecha, pues, la multiplicacion, y comparados los coeficientes término á término, resultan:

$$p=m+M. \quad . \quad . \quad 1.^a$$
$$q=N+mM+n. \quad 2.^a$$
$$r=R+mN+Mn. \quad 3.^a$$
$$s=mR+nN. \quad . \quad 4.^a$$
$$t=nR. \quad . \quad . \quad . \quad 5.^a$$

Por ser n un factor de t, que se supone conocido, para hallar él de m, tomaré él de R de la equacion 5.ª $R=\frac{t}{n}$; él de M de la 1.ª haciendo $M=p-m$; y el de N de la 4.ª haciendo $N=\frac{s-mR}{n}$; ó bien, poniendo por R su valor, $N=\frac{s}{n}-\frac{tm}{n^2}$. Ahora, substituyendo los de M, y N en la 2.ª tendré una equacion en m, y n,

que dará el valor de m, puesto en ella por n el divisor con quien he de tantear: será, pues, la equacion $\frac{s}{n}-\frac{mt}{n^2}+m\,(p-m)+n=q$; la qual ordenada, y resuelta dará dos valores de m, á saber:

$$m=-\left(\frac{-p+\frac{t}{n^2}}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{-p+\frac{t}{n^2}}{2}\right)^2+\frac{s}{n}+n-q}$$

que servirán de formula.

Para hallar, pues, en el caso particular el factor auxîliar del 2.° grado, tomo por n un divisor de t de dos dimensiones, y substituido en la formula con los valores de p, q, s, t, tendré dos valores de m. Con cada uno de ellos formo la equacion $x^2+mx+n=o$, y parto por ella la propuesta. Si ninguno de los dos satisface, tentáre otro divisor ó valor de n, hasta hallar el factor que busco. Exemplo 1.°

Equacion. $x^6-4cx^5+6c^2x^4-8c^3x^3+5c^4x-c^6=o$.

Será $p=-4c$; $q=6c^2$; $r=-8c^3$; $s=5c^4$; $t=-c^6$

Los divisores de t de dos dimensiones son $\pm c^3$. Pruebo $+c^3$. Substituidos estos valores en la formula; será $m=-\frac{3}{2}c\pm\sqrt{(\frac{3}{2}c)^2}$: luego los dos valores de m son $m=o$; $m=-3c$. Formo con el primero el factor del 2.° grado $x^2+c^2=o$; y por que la division no tiene lugar lo excluyo, y con el 2.° valor $m=-3c$ formo la equacion $x^2-3cx+c^2=o$, por quien partiendo la pro-

puesta hallo el quociente ó factor del 3.° grado $x^3-cx^2+2c^2x-c^3=0$, que es el que se pide, y que multiplicados entre sí restituyen la equacion, y resueltos dán sus raices.

Exemplo 2.°. Equacion

$$x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21=0.$$

Como esta equacion no se halla reductible por un factor del primer grado, se pide reducirla si es posible por dos, uno del 2.° grado, y otro del 3.°

Será $p=3$; $q=2$; $r=8$; $s=-36$; $t=21$. Los divisores de 21 son ±3; ±7, supuestos de dos dimensiones. Pruebo $+3$, y hallo $m=\frac{1}{3}\pm\sqrt{\frac{1}{9}-11}$ que evidentemente no sirve. Pruebo -3. y encuentro $m=\frac{1}{3}\pm\frac{8}{3}$. Con este 2.° valor de $n=-3$, y $m=3$, formo la auxiliar $x^2+3x-3=0$, por quien partiendo la del 5.° grado, resulta $x^3+5x-7=0$, que multiplicados entre sí la restituyen, y resueltos dán sus raices.

12. Para asegurarse que el divisor que se ha tomado es el conveniente para hallar el valor de m, se puede tomar otro camino que el de la division, que hemos seguido hasta aqui. Con el valor hallado de m, y el que se le ha supuesto á n, hallense nuevos valores de M, y N; y con el de $R=\frac{t}{n}$ sustituyanse en la equacion 3.ª de que no se ha hecho uso: si la verifican, y la hacen identica, los valores de m, y n son los convenientes. Vease en el exemplo 1.° siendo $m=-3c$; $n=c^2$; $R=-c^3$, será $M=-c$; $N=2c^2$: luego la equacion tercera $r=R+mN+Mn$ se

convierte en $-8c^3=-c^3-6c^3-c^3$, que es identica. Fundandose esto, en que si los valores de m, y n verifican la equacion de que no se habia hecho uso, satisfacen á las condiciones del problema: luego son los convenientes.

13. Tambien puede por este método hallarse el otro factor ó equacion subsidiaria bien sea del 2.° grado, ó bien del 3.° Porque hallado el valor de m, con este y él del divisor puesto por n, se hallan los de M, y N en las equaciones 1.ª y 2.ª (por exemplo), y con él de R que se tiene en la 5.ª se logran los tres coeficientes que son menester. Vease en el exemplo numerico antecedente, siendo $m=3$; $n=-3$; $R=-7$, será $M=p-m=0$; y $N=5$; y el factor del tercer grado $x^3+5x-7=0$, como antes.

APLICACION Á HALLAR LOS FACTORES qualesquiera sean comensurables ó incomensurables.

14. Hasta aqui hemos usado de los divisores racionales para hallar las dos equaciones auxîliares, ó factores, que resueltos dán las raices de la equacion que se propone; y dichos factores han sido tambien racionales. Pero extendamos el método hasta donde alcanza.

Sea la equacion $x^4+2bx^3+b^2x^2-a^2b=0$. Busquemos un factor del 2.° grado, y busquémolo sin depender de la formula. Comparándola á la

canonica del 4.ª grado, hallaremos las mismas equaciones E (núm 1.º). Substituyo en ellas los valores de p, q, &c. sacados de la propuesta, y tengo las quatro siguientes.

$$m+M=2b.$$
$$n+mM+N=b^2.$$
$$Mn+mN=o.$$
$$nN=-a^2b.$$

Saco de la 1.ª $M=2b-m$.

Y de la 4.ª. . $N=-\frac{a^2b}{n}$.

Estos valores puestos en la 3.ª dán $m=\frac{2bn^2}{a^2b+n^2}$. . K

Para dar valor á n, exâmino los divisores racionales del último término a^2b que sean de dos dimensiones, y los pruebo con $\pm$. Si ninguno de ellos satisface, exâmino los divisores irracionales, tomándolos tambien de dos dimensiones, y los pruebo con $\pm$: son, pues, todos los divisores de dos dimensiones, racionales, é irracionales del último término a^2b, los siguientes, $\pm a^2$; $\pm ab$; $\pm a\sqrt{ab}$.

Pruebo $+a^2$, y pongo $n=a^2$ en la equacion K, tendré $m=\frac{2ab}{a+b}$. Deberá, pues, ser la equacion ó factor auxîliar $x^2+\frac{2ab}{a+b}\times x+a^2=o$. Para hallar el otro factor, la equacion 1.ª me dará $M=2b-\frac{2ab}{a+b}=\frac{2b^2}{a+b}$. La 4.ª me dará $N=-ab$,

que son los dos coeficientes, y el 2.° factor será $x^2 + \frac{2b^2x}{a+b} - ab = o$. Pero estos dos multiplicados uno por otro deben restituir la propuesta. No la dan: luego son inutiles. Y lo mismo se vé, (como hemos dicho núm. 12.) poniendo en la equacion 2.ª de que no hemos hecho uso, los valores hallados de m, M, n, N, pues como no la hacen identica, no satisfacen.

Del mismo modo se hallarán inútiles todos los demas divisores comensurables. Pruebo, pues, el divisor irracional $+a\sqrt{ab}$, haciendo $n = a\sqrt{ab}$. Este valor puesto en K dá $m = b$. Y este substituido en la 1.ª resulta $M = b$: y finalmente en la 4.ª será $N = -\frac{a^2b}{n} = -\frac{a^2b}{a\sqrt{ab}} = -a\sqrt{ab}$. Estos quatro valores puestos en la 2.ª equacion de que no se ha usado, la hacen identica: luego dan la solucion; y los factores del 2.° grado en que se resuelve la propuesta son $x^2 + bx + a\sqrt{ab} = o$; $x^2 + bx - a\sqrt{ab} = o$, que multiplicados entre sí la restituyen.

El mismo resultado se halla haciendo $n = -a\sqrt{ab}$.

Sea otro exemplo la equacion literal del 5.° grado.

$$x^5 + (a+b)x^4 + (2ab + a\sqrt{ab})\, x^3 + ab^2x^2 - a^4b = o.$$

Comparada á la canónica del 5.° grado, hallaremos las mismas equaciones (núm. 11.) y substituyendo en ellas los valores de p, q, r, &c. sacados de la propuesta, tendremos las cinco siguientes.

$$m+M=a+b$$
$$n+mM+N=2ab+a\sqrt{ab}$$
$$R+mN+Mn=ab^2$$
$$mR+nN=o$$
$$nR=-a^4b.$$

Saco de la 1.ª $M=a+b-m.$

Y de la 5.ª $R=\frac{-a^4b}{n}$

Pongo en esta por n, $a\sqrt{ab}$, que es un divisor irracional de dos dimensiones del último término $-a^4b$.

Y se tendrá $R=-a^2\sqrt{ab}$.

Substituyanse en la 4.ª por R, y n, sus valores.

Y se tendrá $N=ma$.

Finalmente, pongase en la 3.ª por R, N, M y n, sus valores.

Y se tendrá $m^2-m\sqrt{ab}=b^2-b\sqrt{ab}$

Luego $m=\frac{\sqrt{ab}}{2}\pm b-\frac{\sqrt{ab}}{2}$

De consiguiente $m=b$.

Y. . $m=-b+\sqrt{ab}$.

Luego el factor del 2.° grado en que se resuelve la propuesta es $x^2+bx+a\sqrt{ab}=o$.

Y partiendo la propuesta por este factor, se tiene al quociente el otro factor del tercer grado $x^3+ax^2+abx-a^2\sqrt{ab}=o$, que es el que se pide, y que multiplicados entre sí restituyen la equacion, y resueltos dán sus raices.

Observese tambien, que si los valores de n, m, M, y N se substituyen en la 2.ª equacion

de que no se ha hecho uso la hacen identica, y de consiguiente deben dar la solucion.

6.° GRADO.

15. La equacion del 6.° grado se reduce por tres del 2.° ó por dos una del 2.° y otra del 4.° ó por dos del 3.° Pero si se puede resolver en tres del 2.° se podrá tambien en dos una del 2.° y otra del 4.°. Tentaremos, pues, la reduccion por dos del 2.° y 4.° y despues por dos del 3.°

1.ª Reduccion por dos factores del 2.° y 4.°

Sea $x^6 - 13ax^5 + 45a^2x^4 - 71a^3x^3 + 57a^4x^2 - 16a^5x + 2a^6 = 0$.

Las auxiliares son $x^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$.

$x^2 + mx + n = 0$.

Multiplicados y comparados los coeficientes con los de la propuesta resultan las equaciones

$M + m = -13a$ . . 1.ª

$N + mM + n = 45a^2$ . . 2.

$P + mN + nM = -71a^3$ 3.

$Q + mP + Nn = 57a^4$. 4.

$nQ + nP = -16a^5$ . . 5.

$Qn = 2a^6$ . . . . . 6.

De la 1.ª saco $M = -13a - m$. E.

Y de la 6.ª $Q = \frac{2a^6}{n}$ . . . F.

el valor de M puesto en la 2.ª dá $N = 45a^2 + 13am + m^2 - n$...G.

Tomese ahora la 5.ª y poniendo en ella

el valor de Q, resultará $P = \frac{-16a^5}{n} - \frac{2a^6m}{n^2}$ ..H

Substituyendo ahora en la 4.ª los valores de N, P, y Q, tendré la equacion en m, y n; esto es, $\frac{2a^6}{n} + m\left(\frac{-16a^5}{n} - \frac{2a^6m}{n^2}\right) + n(45a^2 + 13am + m^2 - n) = 57a^4$, que reducida y ordenada en la forma mas comoda es

$$m \frac{-16a^5mn + 13an^3m + 2a^6n - 57a^4n^2 + 45a^2n^3 - n^4}{n^3 - 2a^6}$$

$= o$.

Pero la equacion 6.ª nos dice que n es un divisor de $2a^6$, y debiendo ser de dos dimensiones, busco primero todos los divisores simples, que son 2a, a, a, a, a, a, y de ellos formo los binarios $\pm 1^2$, $\pm 2a^2$, $\pm a^2\sqrt{2}$. Pongo en la equacion $n = \pm a^2$. El 1.º la convierte en $m^2 + 3am + 11a^2 = o$, y el negativo la muda en $m^2 - am + 35a^2 = o$: una y otra equacion dán por m valores imaginarios, como es manifiesto: luego estos divisores no sirven.

Pongo $n = 2a^2$, y la equacion se hace $m^2 + 12am + 20a^2 = o$. Resuelta, dá dos valores de m, esto es, $m = -10a$; $m = -2a$. Si tomamos el 1.º hallaremos $M = -3a$; $N = 13a^2$; $P = -3a^3$. Substituidos estos valores en la equacion 3.ª de que no se ha usado, el resultado es $139a^8 = 71a^8$ que es absurdo: luego el divisor es inutil. Pero tomando el valor 2.º $m = -2a$. se halla $M = -11a$; $N = 21a^2$; $P = -7a^3$, y finalmente se ha-

lla $Q=a^4$, y estos son los coeficientes del factor del 4.º grado que se buscan; pues si ponemos en la equacion 3.ª los valores hallados de M, N, y P, el resultado es una equacion identica: queda, pues, la propuesta resuelta en dos factores uno del 4.º grado $x^4-11ax^3+21a^2x^2-7a^3x+a^4=0$, y otro del 2.º $x^2-2ax+2a^2=0$, que es lo que se pide.

16. Notese de paso, que si despues de hallados los valores de M, N, P, Q, como se ven en E, G, H, F, en lugar de substituirlos en la equacion 4.ª como hicimos, se hubieran substituido en la 3.ª, hubiera venido una equacion en m del 3.º grado, á saber,

$$m^3+13am^2+45a^2m-\frac{16a^5}{n}+71a^3-13an=0.$$
$$-nm$$
$$-\frac{2a^6m}{n^2}$$

Que poniendo $n=2a^2$ como antes, se convierte en esta $2m^3+26am^2+85a^2m+74a^3=0$, que es de mas dificil solucion que la del 2.º grado que antes hallamos. Sin embargo, por esta encontrariamos lo mismo. Porque esta equacion tiene una raiz comensurable $-2a$, la qual dará como antes los valores de M, N, P, Q, y substituidos los convenientes en la equacion 4.ª de que en esta hipótesis no se hubiera hecho uso, la hacen identica como es facil de ver. Infierese, pues, que la eleccion de las equaciones dará mas ó menos facilidad en el calculo.

SEGUNDA REDUCCION DE LA EQUACION del 6.° grado por dos del 3.°

17. La equacion $x^6+3ax^5+4a^2x^4+6a^3x^3+6a^4x^2+3a^5x+2a^6=0$.
Las auxîliares. . $x^3+Mx^2+Nx+P=0$.
Y. . . . . . $x^3+mx^2+nx+p=0$.
Multiplicadas entre sí, y comparados los coeficientes á los de la propuesta, se tienen.

$M+m=3a$. 1.ª
$N+mM+n=4a^2$. 2.ª
$P+mN+Mn+p=6a^3$. 3.ª
$Pm+Nn+pM=6a^4$. 4.ª
$Pn+pN=3a^5$. 5.ª
$Pp=2a^6$. 6.ª

De la 1.ª sale. . . . . $M=3a-m$. . . E.

De la 6.ª. . . . . . $P=\frac{2a^6}{p}$ . . . . . . F.

este valor de P puesto en la 5.ª dará. . . $N=\frac{3a^5}{p}-\frac{2a^6n}{p^2}$ . . . . G

De la 2.ª substituyendo los valores de M y N, se saca.. $n=\frac{4a^2p^2-3a^5p+p^2m^2-3ap^2m}{p^2-2a^6}$ H.

De la 3.ª substituyendo los de M, N, P, se saca otro de. . $n=\frac{6a^3p^2-p^3-3a^5pm-2a^6p}{3ap^2-p^2m-2a^6m}$

Igualando estos dos valores de n, resulta una equacion en m, y p, será pues:

$$\frac{4a^2p^2-3a^5p+p^2m^2-3ap^2m}{p^2-2a^6}=\frac{6a^3p^2-p^3-3a^5pm-2a^6p}{3ap^2-p^2m-2a^6m}$$

Esta equacion ordenada por m, y dispuesta en la forma mas cómoda es:

$$\left.\frac{\begin{array}{r} m^3-6ap^2m^2+13a^2p^3m-p^4 \\ -6a^7pm^2-6a^5p^2m-6a^3p^3 \\ +8a^8pm+9a^6p^2 \\ -12a^9p \\ +4a^{12} \end{array}}{p^3+2a^6p}\right\}=0$$

Equacion del 3.° grado que se ha de resolver para hallar un valor de m que satisfaga á la question.

Por la equacion 6.ª sabemos que p debe ser un divisor de $2a^6$, pero de tres dimensiones. Hallo, pues, todos los divisores de esta especie que son, los comensurables $\pm a^3$; $\pm 2a^3$; y los incomensurables $\pm a^3\sqrt{2}$.

Pongo $p=a^3$, y la equacion se convierte en $m^3-4am^2+5a^2m-2a^3=0$, que tiene dos raices iguales $m=a$; $m=a$, y una desigual $m=2a$, como cada uno podrá comprobar poniendo a por m, y 2a por m en la equacion, pues uno y otro valor la reducen á cero.

Tomo, pues, $m=a$; y habiendo supuesto $p=a^3$, con estos valores puestos en H se halla

$n=a^2$, y estos tres valores puestos en E, F, G, dán $M=2a$; $N=a^2$; $P=2a^3$, que son los coeficientes de uno de los dos factores. Para saber si son útiles, ponganse en la equacion 4.ª de que no se hizo uso, y se vé que no la hacen identica: luego no sirven.

Tomo $m=2a$, y hechas las mismas operaciones que antes, resultan $M=a$; $N=a^2$; $P=2a^3$ que son los coeficientes que se piden, puesto que substituidos en la equacion 4.ª la verifican: luego uno de los factores será $x^3+ax^2+a^2x+2a^3=0$, y el otro $x^3+2ax^2+a^2x+a^3=0$, que multiplicados entre sí restituyen la propuesta.

18. Á lo dicho hasta aquí añadiremos algunas advertencias: 1.ª En los divisores del último término de las equaciones literales los coeficientes numéricos no forman dimension, porque no indican multiplicacion de la letra, sino repeticion por suma. Así $2a$ es un divisor simple de $2a^6$ del mismo modo que a; y $2a^2$ es de dos dimensiones como a^2. Lo propio sucede con los divisores incomensurables: de a y $2a$ simples se forma (9) el divisor incomensurable $\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$ de una dimension, del qual $\sqrt{2}$ no es mas que un coeficiente numérico irracional.

19. 2.ª Quando no resuelven el caso los divisores comensurables, se acude (14) á los incomensurables, pero no es menester tentarlos todos. Para discernir quales son los que se deben tentar sigase esta regla. Vease si el divisor incomensurable es un divisor exâcto y sin fraccion

del último término de la equacion, por exemplo de $2a^6$. Este tiene por divisor iracional $a^2\sqrt{2}$, y quiero saber si puedo hacer con él la tentativa. Parto $2a^6$ por $a^2\sqrt{2}$, transformando $2a^6$ de esté modo $\frac{\sqrt{2}.\ \sqrt{2}.\ a^6}{a^2\sqrt{2}} = a^4\sqrt{2}$; este quociente exâcto, y sin fraccion me hace ver, que puedo tentar con él la solucion. Pero $2a^2\sqrt{2}$ es otro divisor incomensurable de dos dimensiones del último término $2a^6$. Fara excluirlo ó no, parto $\frac{\sqrt{2}.\ \sqrt{2}.\ a^6}{2a^2\sqrt{2}}$ y el quociente $\frac{a^4\sqrt{2}}{2}$ que es fraccionario me hace ver que no debe admitirse: así se discurrirá en los demas casos. El fundamento de esto está en que entre los infinitos incomensurables que pueden, multiplicados entre si, producir una cantidad comensurable, y que de consiguiente pueden ser sus divisores, solo deben admitirse los que al mismo tiempo pueden sea raiz de la equacion. Ahora, si el último término de una equacion, y todos los demas, estan sin fraccion como se supone, ninguna raiz puede ser fraccion, ni el quociente que resulte del último término partido por qualesquiera de las raices puede ser fraccion: luego si lo fuere, el divisor no es admisible.

20. 3.° Se vé que el método es general, pero se vé tambien que al paso que crece el grado de la equacion, crece la dificultad por la multiplicidad de los términos, y porque la equacion en m se vá elevando mas como es natural:

así es que en los grados muy superiores es preferible recurrir á los métodos geométricos, ó á la aproxîmacion. Finalmente debemos advertir, que como es método de tanteo, algunas veces no se logra lo que se pretende.

FIN.